Пакет $\mathbf{L}_2$ v1 для Maple V R4*

В. З. Цалюк†

9 сентября 2008 г.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и администрации Пермского края (грант № 07–01–96060–р–Урал).

Аннотация

Настоящий документ содержит описание пакета $\mathbf{L}_2$ версии 1 ($\mathbf{L}_2$ v1).

Пакет $\mathbf{L}_2$ предназначен для производства вычислений с кусочно-полиномиальными функциями в среде символьных вычислений Maple V R4.

Библиотека `l2_lib.m` реализует операции над кусочно-полиномиальными функциями, рассматривая их как элементы гильбертова пространства $\mathbf{L}_2(a, b)$. Кроме этого, она предоставляет возможность производить вычисления с интегральными операторами в этом пространстве, оперируя с кусочно-полиномиальными ядрами этих операторов.

Библиотека `bvp_lib.m` работает с с кусочно-полиномиальными функциями, рассматривая их как решения или коэффициенты уравнений или краевых условий линейной краевой задачи. В частности, имеется возможность вычислять значения функций, дифференцировать и интегрировать их. Имеется процедура, вычисляющая функцию Грина для краевой задачи для простейшего дифференциального уравнения вида $\frac{d^n}{dt^n}x = z$.

В составе пакета также имеется архив с примерами применения процедур пакета, в том числе для решения прикладных задач.

Настоящий документ содержит описание основных мотивов, стимулировавших работу над пакетом, и полную документацию для процедур вышеупомянутых библиотек.

†Кубанский государственный университет, г. Краснодар
E-mail: `vts@math.kubsu.ru`

Содержание

Алфавитный указатель процедур пакета

0 Введение. Зачем это?

После выхода в свет книги [2] у нас появилась потребность в вычислениях в пространстве $\mathbf{L}_2$ функций, определенных на интервале $(a,\, b)$ числовой оси. Все, чем мы обычно располагаем для задания таких функций, это кусочное описание формулами. Но разбиение интервала $(a,\, b)$ на „куски“ может быть различным для разных функций и может изменяться в результате операций над функциями. Поэтому как разбиение отрезка на „куски“, так и выражения, задающие функцию на этих „кусках“, являются составными частями структуры, содержащей описание кусочно заданной функции.

Интегральные операторы

$$(\mathbf{K}x)(t) = \int_a^b K(t,\, s)x(s)\, ds.$$

в пространстве $\mathbf{L}_2(a,\, b)$ задаются их ядрами $K(t,\, s)$. Ядра операторов также могут быть кусочно заданными. Границы „кусков“, на которые разбивается квадрат $(a,\, b) \times (a,\, b)$, могут быть прямыми (отрезками прямых).

В качестве основы пакета была выбрана система символьных вычислений Maple, т.к. это дало возможность решать задачи, избегнув ошибки дискретизации и округления при вычислениях.

Версия Maple V R4 (Campus Wide Version) была выбрана в силу ее общедоступности: согласно [5, с. 99], она «свободно распространяется на CD-ROM и по сети Internet. Однако она может использоваться пользователями только для целей образования, но не для коммерческих целей.»

Указанная книга явилась для меня единственным, кроме англоязычного help’а самой системы, источником сведений о программировании в Maple V R4. Она написана явно наспех и не всюду осмысленно; часто мы встречаем в ней просто не всегда грамотный подстрочный перевод help’а. Тем не менее она оказалась очень полезна для работы, за что я хотел бы выразить ее автору и издательству свою искреннюю признательность.

1 Установка пакета

1.1 Системные требования

. . . определяются наличием работоспособного пакета Maple V R4. Настоящий пакет тестировался в операционных системах MS Windows 98SE, MS Windows XP.

1.2 Состав пакета

В состав пакета входят следующие файлы:

Имя файла	**Описание**
`l2_lib.m`	Основная библиотека пакета
`bvp_lib.m`	„Прикладная“ библиотека, посвященная краевым задачам
`l2doc.pdf`	Настоящий файл документации
`examples.zip`	Архив с примерами использования процедур пакета

Просмотреть (краткую) документацию по пакету в формате `.htm` и скачать последнюю версию можно по адресам
`http://vts.math.kubsu.ru/l2/l2.htm`,
`http://l2.pstu.ru/l2.htm`.

1.3 Установка пакета

Файлы библиотек `l2_lib.m` и `bvp_lib.m` скопируйте в папку, обозначенную системной переменной `libname` установленного пакета Maple V R4.

2 Терминология

Я полагаю, что искушенные пользователи Maple имеют представление о разнице между выражением и функцией, но на всякий случай считаю нужным обсудить это здесь.

Большинство процедур Maple использует и выдает в качестве значений не функции, а выражения. Функции, в действительности, используются в Maple редко. К сожалению, в help'е пакета авторы, с присущей школьникам (и алгебраистам) беззаботностью, часто называют выражения функциями, что затрудняет понимание.

Эту разницу, при необходимости, можно уяснить, разобрав предлагаемые здесь вопросы и ответы на них.

Q. Maple-функция `piecewise` создает выражение или функцию?

A. Выражение типа `piecewise`.

Q. `x(t)` — это функция или выражение?

A. Это выражение, значение которого является значением функции `x` при значении аргумента, равного `t`. Однако, это значение может зависеть от какого-то другого аргумента.

Q. Что в Maple подвергается интегрированию и интегральным преобразованиям Лапласа, Фурье и т.д.?

A. Нет, не функции, а выражения, содержащие некоторую переменную, по которой и совершается интегрирование.

Q. Если `x` — функция одного аргумента, то `int(x(s), s = 0..t)` представляет собой выражение или функцию?

A. Выражение, содержащее переменную `t`. Если мы хотели получить функцию, нам следовало написать

```
func := t -> int(x(s), s = 0..t);
```

Q. Как получить значение функции `x` в точке `1/2`?

A. `x(1/2);`

Q. Как подставить значение `t = 1/2` в выражение `x`?

A. `subs(t = 1/2, x)`

Q. `x(t)` и `x(s)` — это одно и то же или нет?

A. Нет, это разные выражения. Однако, они равны, если переменным `t` и `s` было присвоено одно и то же значение.
А функция одна и та же в любом случае!

Q. Что будет выведено на экран в результате выполнения следующих двух последовательностей команд? Они довольно часто встречаются в практике программирования итерационных процессов.

Для выражений:

```
f := t:
f_old := f:
f := t^2:
f - f_old;
```

Для функций:

```
f := t -> t:
f_old := f:
f := t-> t^2:
f(t) - f_old(t);
```

A. В версии Maple V R4 в первом случае получается $t^2 - t$, а во втором — 0. Что наводит на очень глубокие мысли о возможных источниках ошибок.

У Вас другая, более совершенная версия? — Тогда проверьте сами.

Q. Пусть `X` — выражение и

```
x := t -> X:
```

Если в выражение `x(t)` подставить `s` вместо `t`:

```
subs(t=s, x(t)):
```

то получится ли то же, что и `x(s)`? А что получится, если в `x(t)` подставить `t` вместо `s`:

```
subs(s=t, x(t)):
```

?

A. Это для вашего самостоятельного размышления. Главное, чтобы был понят вопрос!

3 Соглашение об именах

Выражения, моделирующие собой функции пространства , мы называем $\mathbf{L}_2$-функциями, не в честь пространства, а по имени пакета.

Выражения, моделирующие интегральные операторы, действующие из $\mathbf{L}_2(a,\, b)$ в $\mathbf{L}_2(a,\, b)$, а точнее, их ядра, мы называем ядрами, не создавая терминологических конфликтов.

Все процедуры и глобальные переменные пакета имеют имена, начинающиеся с символов `l2_` или `bvp_`. Использование этих префиксов в каких-либо других целях — это, гм..., не самая умная идея.

После `l2_` или `bvp_` имена процедур имеют, как правило, прописные буквы `K` и/или `F`, указывающие на тип(ы) операндов, участвующих в операции, реализуемой процедурой: `K` для ядер (т.е. интегральных операторов) и `F` для $\mathbf{L}_2$-функций. Затем со строчной буквы следует обозначение реализуемой операции (в сокращенном виде).

Например, процедура для вычисления скалярного произведения двух $\mathbf{L}_2$-функций имеет имя `l2_FinnerProd`. Если бы была написана процедура для вычисления скалярного произведения ядер (в пространстве $\mathbf{L}_2((a,\, b) \times (a,\, b))$), то она бы имела имя `l2_KinnerProd`.

Пакет содержит 4 специальные глобальные переменные.

Границы интервала $(a,\, b)$ устанавливаются и хранятся в переменных `l2_a` и `l2_b` соответственно. Переменная `l2_complex` логического типа указывает, над каким числовым полем: $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ — мы производим вычисления. Как известно, от этого зависят применяемые расчетные формулы. Эти переменные создаются и принимают свои значения при вызове какой-либо из процедур `*_init`.

Глобальная переменная `bvp_n` хранит в себе порядок краевой задачи, с которой работает (в текущий момент) библиотека `bvp_lib`. Ее значение устанавливается процедурой `bvp_order`.

Две переменные, `t` и `s`, имеют сакральное значение для этого пакета, и не должны использоваться как-то иначе. Первая из них является универсальным обозначением аргумента всех рассматриваемых функций: $x(t)$ — а вторая используется вместе с первой для описания ядер интегральных операторов

$$(\mathbf{K}x)(t) = \int_a^b K(t,\, s)x(s)\, ds.$$

Дело в том, что в связи с описанными в параграфе 2 *особенностями* пакета Maple мы предпочитаем функции и ядра представлять не функциями, а выражениями. Содержащиеся в этих выражениях переменные `t` и `s` изображают аргумент t функций и аргументы $(t,\, s)$ ядер.

Запрещено ограничивать переменные `t` и `s` предложением `assume(...)`, т.к. Maple V R4 не умеет `subs` переменные в выражениях, если они `assumed`.

4 Основные типы данных

4.1 L_2-функции

Функции, являющиеся элементами пространства $\mathbf{L}_2(a, b)$, описываются в нашем пакете кусочно-заданными выражениями. Они представляются в виде списка `list`

```
x := [B_0, E_1, B_1, E_2, B_2, ..., E_n, B_n]:
```

где `B_i` — точки разбиения отрезка $[a, b]$ на части, называемые здесь и далее *границами*. `E_i` — *выражения*, по которым вычисляются значения функции $x(t)$ для $t \in$ (`B_{i-1}`, `B_i`).

Границы `B_i` должны составлять упорядоченную последовательность чисел (`constant`), причем должны выполняться неравенства

$$\texttt{l2\_a} \le \texttt{B\_0} < \texttt{B\_n} \le \texttt{l2\_b}.$$

Эти условия можно проверить процедурой `l2_Fcheck`.

Если между `l2_a` и `B_0` имеется строгое неравенство `l2_a` $<$ `B_0`, это означает, что $x(t) = 0$ для $t \in [a,$ `B_0`$)$. Аналогичное соглашение имеет место и для отрезка (`B_n`, $b]$.

Список, состоящий ровно из одного элемента, как, например, `[ E ]`, воспринимается, как функция, равная `E` на всем отрезке $[a, b]$.

Если список `x` пуст или состоит из 2-х элементов, то это воспринимается как функция, тождественно равная 0.

Таким образом, для пространства $\mathbf{L}_2(0, 3)$ выражения `[ ]`, `[0]`, `[0, 0, 3]`, `[1, 0, 2]`, `[1, t^2]` означают одно и то же — тождественный ноль.

Предложенная структура похожа на Maple-структуру `pwlist`. Отличие в том, что у нас крайние элементы списка являются границами отрезков разбиения, а не выражениями, имеющими место до бесконечности.

Пример: функцию

$$y(x) = |x - 1| - 1$$

из пространства $\mathbf{L}_2(0, 2)$ можно задать в виде

```
y := [0, abs(t-1) - 1, 2]:
```

или в виде

```
y := [0, t, 1, 2-t, 2]:
```

Второй из способов предпочтительнее, т.к. меньше загружает Maple вычислительной работой.

Обратите внимание, что вместо аргумента x мы использовали специальную переменную `t`!

4.2 Ядра интегральных операторов

выражаются в виде списка `list`

```
K := [B_0, D_1, B_1, D_2, B_2, ..., D_n, B_n]:
```

где `B_i` — точки разбиения отрезка $[a, b]$ на части, `D_i` — списки, похожие на $\mathbf{L}_2$-функции. Разница в том, что в них в качестве аргумента используется переменная `s` вместо `t`, а `t` может возникать как параметр, от которого могут зависеть как границы, так и выражения списка `D_i`.

Границы `B_i` должны составлять упорядоченную последовательность чисел (`constant`), причем должны выполняться неравенства `B_0` $\geq$ `l2_a` и `B_n` $\leq$ `l2_b`.

Если между `l2_a` и `B_0` имеется строгое неравенство `l2_a` $<$ `B_0`, это означает, что $K(t, s) = 0$ для $t \in [a,$ `B_0`$)$ и всех s. Аналогичное соглашение имеет место и для отрезка (`B_n`, b].

Если ядро выражено списком, состоящим ровно из одного элемента (списка), как, например, `K := [D]`, то оно определяется списком `D` для всех $t \in [a, b]$.

Если список `K` пуст или состоит из 2-х элементов, то это воспринимается как ядро, тождественно равное 0.

Границы списка `D_i` должны составлять последовательность линейных выражений вида c_1`*t+`c_0 (где c_0, c_1 — числа (`constant`)), строго возрастающую при каждом $t \in$ (`B_{i - 1}`, `B_i`).

Эти условия можно проверить процедурой `l2_Kcheck`.

Примеры: 1) оператор

$$(\mathbf{K}y)(x) = \int_0^{1-x} sy(s)\,ds$$

в пространстве $\mathbf{L}_2(0, 1)$ задается ядром

```
K := [0, [0, s, 1-t, 0, 1], 1]:
```

или, проще, в виде

```
K := [[0, s, 1-t]]:
```

2) Оператор

$$(\mathbf{K}y)(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x sy(s)\,ds, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < 2, \\ \displaystyle x\int_0^3 y(s)\,ds, & 2 < x < 3, \end{cases}$$

в пространстве $\mathbf{L}_2(0,\,3)$ задается ядром

```
K := [0, [0,s, t], 1, [ ], 2, [t], 3]:
```

Обратите внимание, что вместо аргумента x мы использовали специальную переменную `t`!

5 Библиотека l2_lib

5.1 Служебные процедуры

`l2_init := proc(a::numeric,b::numeric)` indexl2_init
или
`l2_init := proc(a::numeric,b::numeric, complex::boolean)`
или
`l2_init := proc(a::numeric,b::numeric, complex::name)`
Не возвращает значения. Устанавливает внутренние переменные пакета, содержащие левую и правую границы интервала (a, b). Порождает ошибку при `a` $\geq$ `b`.

Значение аргумента `complex` = `true` означает, что все вычисления будут производиться над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Можно вместо `true` написать просто `complex`.

Во всех остальных случаях, включая отсутствие этого аргумента, будут применяться более простые формулы, предназначенные для вычислений над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел.

`l2_Fcheck := proc(x::list)`
Проверяет корректность задания $\mathbf{L}_2$-функции `x`. Возвращает `true`, если проверка не нашла ошибок. При обнаружении ошибок (отклонений от описанных выше правил) возвращает `false` и выводит в окно Maple сообщение с диагностикой ошибки. После исправления диагностированных ошибок повторная проверка может выявить новые ошибки!

Любое четное количество элементов списка считается ошибкой.

Тип результата — логическая константа.

`l2_Kcheck := proc(K::list)`
Проверяет корректность задания ядра `K`. Возвращает `true`, если проверка не нашла ошибок. При обнаружении ошибок (отклонений от описанных выше правил) возвращает `false` и выводит в окно Maple сообщение с диагностикой ошибки. После исправления диагностированных ошибок повторная проверка может выявить новые ошибки!

Любое четное количество элементов списка считается ошибкой.

Тип результата — логическая константа.

Проверка исходных данных двумя последними процедурами может быть полезной в случае появления каких-либо странных, необъяснимых на первый взгляд, сообщений об ошибках.

`l2_Fprune := proc(x::list)`
Осуществляет „обрезку“ $\mathbf{L}_2$-функции, т.е. удаляет крайние выражения-элементы `E_i`, если они равны 0, и устраняет повторы, когда два соседних выражения `E_i` и `E_{i+1}` совпадают. Например, если

```
x := [0, 0, 1, 2*t, 2, 2*t, 3, 0, 4]:
```

то

$$\texttt{l2\_Fprune(x)} = [1, 2 * \texttt{t}, 3].$$

Тип результата — $\mathbf{L}_2$-функция.

Использование „обрезки“ может быть полезно, т.к. функции пакета, вообще говоря, не оптимизируют получаемые с их помощью результаты.

`l2_Kprune := proc(K::list)`
Осуществляет „обрезку“ ядра, т.е. удаляет крайние выражения-элементы `D_i`, если они равны 0 (представлены пустыми списками). Осуществляет „обрезку“ каждого выражения `D_i`. Устраняет повторы, когда два соседних выражения `D_i` и `D_{i+1}` совпадают.

Тип результата — ядро.

Использование „обрезки“ может быть полезно, т.к. функции пакета, вообще говоря, не оптимизируют получаемые с их помощью результаты.

5.2 Процедуры для работы с функциями

`l2_Fsum := proc(x::list, y::list)`
Вычисляет сумму двух $\mathbf{L}_2$-функций `x` и `y`:

$$x(t) + y(t).$$

Тип результата — $\mathbf{L}_2$-функция.
Примеры см. в файле `zip://examples.zip/green/green.mws`.

`l2_FplusFunc := proc(x::list, f)`
Прибавляет к значениям $\mathbf{L}_2$-функции `x` значения выражения `f`:

$$x(t) + f(t).$$

Тип результата — $\mathbf{L}_2$-функция.

`l2_Fmult := proc(x::list, y::list)`
Вычисляет произведение $\mathbf{L}_2$-функций `x` и `y`:

$$x(t) \cdot y(t).$$

(Эта операция возможна в пространстве $\mathbf{L}_2(a, b)$, так как кусочно многочленные функции ограничены на $[a, b]$.)
Тип результата — $\mathbf{L}_2$-функция.
Пример в файле `zip://examples.zip/pillar/round.mws`.

`l2_FmultFunc := proc(f, x::list)`
Умножает $\mathbf{L}_2$-функцию `x` на ограниченное выражение `f`:

$$f(t) \cdot x(t).$$

Тип результата — $\mathbf{L}_2$-функция.
Примеры см. в файлах
`zip://examples.zip/green/green.mws`,
`zip://examples.zip/pillar/round.mws`.

`l2_Fcomb := proc(c_1,x_1::list, c_2,x_2::list,...`
`c_n,x_n::list)`
Вычисляет линейную комбинацию $\mathbf{L}_2$-функций `x_1`, `x_2`, ..., `x_n` с коэффициентами `c_1`, `c_2`, ..., `c_n` соответственно:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i(t).$$

Тип результата — $\mathbf{L}_2$-функция.

Коэффициенты могут быть любыми выражениями — на ответственность пользователя. Количество пар параметров произвольно.

`l2_Fnorm2 := proc(x::list)`
Вычисляет квадрат нормы $\mathbf{L}_2$-функции `x` в пространстве $\mathbf{L}_2(a, b)$:

$$\|x\|^2 = \int_a^b x^2(t)\,dt.$$

Тип результата — константа.

Пример в файле `zip://examples.zip/pillar/round.mws`.

`l2_Fint := proc(x::list)`
Вычисляет интеграл от $\mathbf{L}_2$-функции `x`:

$$\int_a^b x(t)\,dt.$$

Тип результата — константа.

Можно вместо `l2_Fint(x)` писать
`int(l2_Fpiecewise(x), t=l2_a..l2_b)`;
но это будет считаться раза в 4 дольше.

`l2_Fpiecewise := proc(x::list)`
Превращает $\mathbf{L}_2$-функцию в выражение типа piecewise.
Тип результата — `piecewise`-выражение.

Эту процедуру удобно использовать для построения графиков $\mathbf{L}_2$-функций. Примеры см. в файлах
`zip://examples.zip/error/correct.mws`,
`zip://examples.zip/pillar/round.mws`.

`l2_FinnerProd := proc(x::list, y::list)`
Вычисляет скалярное произведение $\mathbf{L}_2$-функций `x` и `y`:

$$\langle x,\, y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt.$$

Если `l2_complex = false`, то, конечно, операция комплексного сопряжения не производится.

Тип результата — константа.

Пример см. в файле `zip://examples.zip/adjoint.mws`.

`l2_Fconjugate := proc(x::list)`
Для $\mathbf{L}_2$-функции `x` вычисляет комплексно сопряженную $\mathbf{L}_2$-функцию. Если, конечно, `l2_complex` = `true`. Иначе возвращает ту же функцию `x`.

Тип результата — $\mathbf{L}_2$-функция.

`l2_FinnerSubst := proc(x::list, h::list)`
Вычисляет значение оператора внутренней суперпозиции

$$(S_h x)(t) = \begin{cases} x(h(t), & \text{если } \ h(t) \in [a,\, b], \\ 0, & \text{если } \ h(t) \notin [a,\, b] \end{cases} \tag{1}$$

для $\mathbf{L}_2$-функций `x` и `h`.

Тип результата — $\mathbf{L}_2$-функция.

Пользователя просят самому позаботиться о том, чтобы оператор S_h был корректно определен в том пространстве, элементом которого он считает $\mathbf{L}_2$-функцию `x`. Условия действия оператора S_h в пространствах суммируемых функций см. [6], [3, прилож. B.1].

Ограничение, накладываемое пакетом, состоит в том, чтобы решения уравнений $h(t) = b_i$, где b_i — (рациональные) границы $\mathbf{L}_2$-функции `x`, если эти решения лежат в $[a,\, b]$, были рациональны.

Примеры см. в файлах
`zip://examples.zip/innerSubst.mws`,
`zip://examples.zip/iters/iters3.mws`,
`zip://examples.zip/iters/iters4.mws`,
`zip://examples.zip/iters/iters5.mws`.

5.3 Процедуры для работы с интегральными операторами

`l2_KFapplyOp := proc(K::list, x::list)`
Вычисляет значение интегрального оператора $\mathbf{K}$ на $\mathbf{L}_2$-функции `x`:

$$(\mathbf{K}x)(t) = \int_a^b K(t,\, s)x(s)\, ds.$$

Тип результата — $\mathbf{L}_2$-функция.
Примеры — в файлах
`zip://examples.zip/adjoint.mws`,
`zip://examples.zip/super.mws`,
`zip://examples.zip/delay/K1s5.mws`,
`zip://examples.zip/error/correct.mws`,
`zip://examples.zip/green/green.mws`.

```
l2_FKdegen := proc(phi_1::list,psi_1::list,
                   phi_2::list,psi_2::list,
                   ...,
                   phi_n::list,psi_n::list)
```
Вычисляет вырожденное ядро

$$K(t,\, s) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \cdot \psi_i(s),$$

порожденное $\mathbf{L}_2$-функциями `phi_i`, `psi_i`, $i = 1, \ldots, n$.
Тип результата — ядро.
Количество пар параметров произвольно.
Пример см. в файле `zip://examples.zip/resolv.mws`.

```
l2_FKresolvent := proc(phi_1::list,psi_1::list,
                       phi_2::list,psi_2::list,
                       ...,
                       phi_n::list,psi_n::list)
```
Вычисляет резольвенту $R(t,\, s)$ вырожденного ядра $K(t,\, s)$, указанного в описании предыдущей функции `l2_FKdegen`. Точнее, вычисляет ядро интегрального оператора $\mathbf{R}$, такого, что

$$I + \mathbf{R} = (I - \mathbf{K})^{-1}.$$

Если оператор $I - \mathbf{K}$ необратим, генерируется ошибка.

Список аргументов — такой же, как у функции l2_FKdegen. Количество пар параметров произвольно.

Тип результата — ядро.

Пример см. в файле zip://examples.zip/resolv.mws.

l2_Ksum := proc(K_1::list, K_2::list)
Вычисляет сумму ядер K_1 и K_2:

$$K(t,\, s) = K_1(t,\, s) + K_2(t,\, s).$$

Тип результата — ядро.

Примеры см. в файлах
zip://examples.zip/delay/kernel.mws,
zip://examples.zip/green/green.mws.

l2_Kmult := proc(K_1::list, K_2::list)
Вычисляет произведение ядер K_1 и K_2:

$$K_1(t,\, s) \cdot K_2(t,\, s).$$

Тип результата — ядро.

Пример см. в файле zip://examples.zip/Kmult.mws.

l2_FKmult := proc(x::list, K::list)
Вычисляет произведение $\mathbf{L}_2$-функции x (аргумента t) и ядра K:

$$x(t) \cdot K(t,\, s).$$

Тип результата — ядро.

Эта процедура вычисляет ядро произведения $\mathbf{xK}$, где $\mathbf{x}$ — оператор умножения на функцию $x(\,\cdot\,)$, $\mathbf{K}$ — интегральный оператор с ядром $K(t,\, s)$.

Пример см. в файле zip://examples.zip/Kmult.mws.

l2_KFmult := proc(K::list, x::list)
Вычисляет произведение ядра K и $\mathbf{L}_2$-функции x (аргумента s):

$$K(t,\, s) \cdot x(s).$$

Заменять t на s в аргументе x не следует — это делается в самой функции l2_KFmult.

Тип результата — ядро.

Эта процедура вычисляет ядро произведения $\mathbf{Kx}$.

Пример см. в файле zip://examples.zip/Kmult.mws.

`l2_KmultFunc := proc(f, K::list)`
Умножает ядро `K` на ограниченное выражение `f`:

$$f(t,\, s) \cdot K(t,\, s).$$

Тип результата — ядро.

Пример см. в файле
`zip://examples.zip/delay/kernel.mws`.

`l2_Kcomb := proc(c_1,K_1::list, c_2,K_2::list,...`
`c_n,K_n::list)`
Вычисляет линейную комбинацию ядер `K_1`, `K_2`, ..., `K_n` с коэффициентами `c_1`, `c_2`, ..., `c_n` соответственно:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot K_i(t,\, s).$$

Тип результата — ядро.

Коэффициенты могут быть любыми выражениями — на ответственность пользователя. Количество пар параметров произвольно.

`l2_Kconjugate := proc(K::list)`
Для ядра `K` вычисляет комплексно сопряженное ядро. Если, конечно, `l2_complex` = `true`. Иначе возвращает то же ядро `K`.

Тип результата — ядро.

`l2_Kadjoint := proc(K::list)`
Вычисляет ядро оператора, сопряженного к оператору **K**:

$$K^*(t,\, s) = \overline{K(s,\, t)},$$

приведя его к стандартному представлению. Если `l2_complex` = `false`, то, конечно, операция комплексного сопряжения не производится.

Тип результата — ядро.

Примеры см. в файлах
`zip://examples.zip/delay/kernel.mws`,
`zip://examples.zip/adjoint.mws`,
`zip://examples.zip/super.mws`.

`l2_Ksuperpos := proc(K1::list, K2::list)`
Вычисляет ядро оператора $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{K}_2$:

$$K(t,\, s) = \int_a^b K_1(t,\, \tau)\, K_2(\tau,\, s)\, d\tau.$$

Тип результата — ядро.

Примеры см. в файлах
`zip://examples.zip/adjoint.mws`,
`zip://examples.zip/delay/kernel.mws`,
`zip://examples.zip/super.mws`.

`l2_FKinnerSubst := proc(K::list, h::list)`
Для ядра `K` и $\mathbf{L}_2$-функции `h` вычисляет ядро интегрального оператора $S_h\mathbf{K}$, где S_h — определенный согласно (1) оператор внутренней суперпозиции, а $\mathbf{K}$ — интегральный оператор, порожденный ядром `K`.

Тип результата — ядро.

Как и ранее, оператор S_h должен быть был корректно определен в том пространстве, элементом которого он считает $\mathbf{L}_2$-функцию `x` (см. [6], [3, прилож. B.1]).

Ограничения, накладываемое пакетом, состоят в том, чтобы

> $\mathbf{L}_2$-функция `h` была строго монотонна в промежутках между соседними границами. Это условие не проверяется, но при его нарушении правильность результата не гарантирована;
>
> решения уравнений $h(t) = b_i$, где b_i — границы $\mathbf{L}_2$-функции `x`, если эти решения лежат в $[a,\, b]$, были рациональны.

Примеры см. в файлах
`zip://examples.zip/delay/kernel.mws`,
`zip://examples.zip/innerSubst.mws`.

6 Библиотека bvp_lib

Эта библиотека состоит из процедур, не имеющих непосредственного отношения к пространству $\mathbf{L}_2$. Они решают задачи, возникшие при рассмотрении краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$x^{(n)}(t) = z(t)$$

на отрезке $[a, b]$.

Таким образом, эта библиотека рассматривает $\mathbf{L}_2$-функции как элементы таких пространств, как соболевские пространства $\mathbf{W}_p^n$ $(p \geq 1)$[1], или пространства $K\mathbf{C}^n$ (в обозначениях [4]).

Для решений краевых задач естественно, например, вычислять значение в точке $c \in [a, b]$, что совершенно не характерно для элементов пространства $\mathbf{L}_2$.

Глобальная переменная `bvp_n` хранит в себе порядок n краевой задачи, с которой работает (в текущий момент) библиотека `bvp_lib`.

6.1 Служебные процедуры

`bvp_init := proc(a::numeric, b::numeric, complex::boolean)`
Не возвращает значения. Загружает библиотеку `l2_lib` и вызывает выполнение процедуры `l2_init(a, b, complex)`. Описание параметров см. в п. 5.1.

`bvp_order := proc(n::posint)`
Не возвращает значения. Устанавливает значение глобальной переменной `bvp_n` := `n` — порядок краевой задачи.

[1] Так же, как $\mathbf{L}_p$ вместо $\mathbf{L}_2$, здесь вместо $\mathbf{H}^n = \mathbf{W}_2^n$ можно иметь в виду $\mathbf{W}_p^n$.

6.2 Процедуры для работы с функциями

`bvp_Fvalue := proc(x::list, p::constant)`
Вычисляет значение $\mathbf{L}_2$-функции `x` в точке `p`:

$$x(p).$$

Тип результата — число.

Значения в точках разбиения при возможности вычисляются „по непрерывности справа“.

Примеры см. в файле `zip://examples.zip/green/green.mws`.

`bvp_Fdiff := proc(x::list, v_1, ..., v_n)`
Вычисляет производную $\mathbf{L}_2$-функции `x` по переменным `v_1`, `v_2`,..., `v_n`. Если на какой-то стадии происходит дифференцирование разрывной функции, то производная вычисляется кусочно, без возникновения дельта-функций, но на экран выводится предупреждение:
WARNING: derivation of discontinuous function.

Тип результата — $\mathbf{L}_2$-функция.

Примеры см. в файле `zip://examples.zip/green/green.mws`.

`bvp_Fprim := proc(x::list, k::posint)`
Вычисляет первообразную z k-того порядка от $\mathbf{L}_2$-функции `x`, удовлетворяющую начальным условиям $z(a) = \cdots = z^{(k-1)}(a) = 0$.

Второй параметр необязателен, в этом случае производится вычисление однократной первообразной ($k = 1$).

Тип результата — $\mathbf{L}_2$-функция.

Примеры см. в файле `zip://examples.zip/sobolev.mws`.

`bvp_Fcontin := proc(x::list)`
Проверяет $\mathbf{L}_2$-функцию `x` на непрерывность. Возвращает `true`, если функция непрерывна (в понятном, надеюсь, смысле) на отрезке $[a, b]$, и `false` в противном случае.

Тип результата — логический.

Примеры см. в файле `zip://examples.zip/sobolev.mws`.

`bvp_FinSobolev := proc(x::list, n::nonegint)`
При положительном `n` проверяет $\mathbf{L}_2$-функцию `x` на принадлежность Соболевскому пространству `n` раз дифференцируемых функций. Возвращает `true` в случае успешного прохождения теста функцией `x` и `false` в противном случае. При этом $\mathbf{L}_2$-функция вида `[l2_a,` *выражение*`, l2_b]` считается бесконечно непрерывно дифференцируемой.

В случае отсутствия второго аргумента порядок пространства Соболева берется из глобальной переменной `bvp_n`, значение которой установлено процедурой `bvp_order`.

Тип результата — логический.

При `n` $= 0$ процедура возвращает наибольшее возможное значение `n`, при котором $\mathbf{L}_2$-функция `x` принадлежит Соболевскому пространству порядка `n`, или ∞.

Тип результата — неотрицательное целое или `infinity`.

Примеры см. в файле `zip://examples.zip/sobolev.mws`.

6.3 Функции Грина

`bvp_KG := proc()`
Возвращает функцию Грина

$$G(t,\,s) = \frac{1}{b-a}\cdot\begin{cases}(b-t)(s-a), & a<s<t<b,\\ (b-s)(t-a), & a<t<s<b,\end{cases}$$

стандартной двухточечной краевой задачи

$$\begin{aligned}&\ddot{x} = z,\\ &x(a) = x(b) = 0.\end{aligned}$$

Тип результата — ядро.

`bvp_KC := proc()`
Возвращает функцию Грина (Коши)

$$C(t,\,s) = \begin{cases}\dfrac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}, & a\le s\le t\le b,\\ 0, & a\le t<s\le b,\end{cases}$$

стандартной начальной задачи

$$\begin{aligned}&x^{(n)} = z,\\ &x(a) = \cdots = x^{(n-1)}(a) = 0.\end{aligned}$$

Порядок n устанавливается процедурой `bvp_order`.
Тип результата — ядро.

`bvp_FKgreen := proc(A::matrix, Psi::list)`
Вычисляет функцию Грина для краевой задачи

$$\begin{aligned}&x^{(n)} = z, \quad z\in\mathbf{L}_2(a,\,b),\\ &\ell^i x = 0, \quad i = 1,\,2,\,\ldots,\,n.\end{aligned}$$

Порядок n устанавливается процедурой `bvp_order`.

Эта процедура и следующий, связанный с ней, подпараграф обязаны своим появлением идее Е. И. Бравого. Использованные расчетные формулы опубликованы в доказательстве леммы 1 в статье [1].

Подготовка исходных данных для этой процедуры:

1) Линейные функционалы $\ell^i : \mathbf{H}^n[a,\, b] \to \mathbb{R}$ записать в виде

$$\ell^i x = \sum_{j=1}^{n} a_j^i \, x^{(j-1)}(a) + \int_a^b \psi^i(t) x^{(n)}(t)\, dt.$$

2) После чего следует коэффициенты a_j^i записать в квадратную матрицу `A` (i — номер строки, j — номер столбца), а из $\mathbf{L}_2$-функций `psi^i` составить список `Psi`.

В следующем подпараграфе описаны процедуры, помогающие в создании матрицы `A` и списка `Psi`.

Если краевая задача не является однозначно разрешимой, процедура генерирует ошибку, с соответствующим сообщением о ней.

Тип результата — ядро.

Исходный текст этой процедуры и примеры использования см. в файле `zip://examples.zip/green/green.mws`.

6.4 Подготовка данных для функции bvp_FKgreen

Первый шаг подготовки данных состоит в записи линейного непрерывного функционала $\ell : \mathbf{H}^n[a, b] \to \mathbb{R}$ в виде

$$\ell x = \sum_{j=1}^{n} a_j \, x^{(j-1)}(a) + \int_a^b \psi(t) x^{(n)}(t) \, dt.$$

Каждая из функций bvp_FvalPrepData и bvp_FintPrepData возвращает пару, состоящую из списка a $= [a_1, \ldots, a_n]$ и $\mathbf{L}_2$-функции psi, для одного из двух примитивных функционалов.

Линейные комбинации примитивных функционалов вычисляются функцией bvp_FcombPrepData — это второй шаг подготовки данных.

Третий шаг заключается в формировании матрицы A и списка Psi из данных, подготовленных для каждого из функционалов, с помощью функции bvp_FgatherPrepData.

bvp_FvalPrepData := proc(k::nonnegint, c::rational)
Подготовка данных для функционала

$$\ell x = x^{(k)}(c),$$

где $c \in [a, b]$, $0 \le k < n$. В случае $k \ge n$ генерируется ошибка.

Значение — пара [a, psi].

Примеры см. в файле zip://examples.zip/green/green.mws.

bvp_FintPrepData := proc(k::nonnegint, phi::list)
Подготовка данных для функционала

$$\ell x = \int_a^b \varphi(t) x^{(k)}(t) \, dt,$$

где φ — $\mathbf{L}_2$-функция, $0 \le k \le n$. В случае $k > n$ генерируется ошибка.

Значение — пара [a, psi].

Пример см. в файле zip://examples.zip/green/green.mws.

```
bvp_FcombPrepData := proc(c_1,p_1::list, c_2,p_2::list,...
                          c_m,p_m::list)
```
Вычисляет линейную комбинацию пар `p_1`, `p_2`, ..., `p_m` вида `[a, psi]` с коэффициентами `c_1`, `c_2`, ..., `c_m` соответственно.

Значение — пара `[a, psi]`.

Коэффициенты могут быть любыми выражениями — на ответственность пользователя. Количество пар параметров произвольно.

```
bvp_FgatherPrepData := proc(p_1::list, p_2::list,... p_n::list)
```
Составляет из пар `p_1`, `p_2`, ..., `p_n` вида `[a, psi]` матрицу коэффициентов `A` и список $\mathbf{L}_2$-функций `Psi`.

Значение — пара `[A, Psi]`.

Количество параметров должно совпадать с порядком системы, установленным функцией `bvp_order`. В противном случае генерируется ошибка.

Примеры — в файле `zip://examples.zip/green/green.mws`.

7 Лицензия

Настоящая лицензия является соглашением между автором пакета $\mathbf{L}_2$ (далее „пакет“) и Вами, его „Пользователем“. Если Вас не устраивают условия этого соглашения, просто прекратите пользоваться этим пакетом и уничтожьте все имеющиеся в Вашем распоряжении копии файлов пакета.

Авторские права (Copyright) на пакет $\mathbf{L}_2$ принадлежат его автору, В.З. Цалюку, aka VTs.

Права Пользователя. Любому физическому или юридическому лицу, получившему пакет законным способом, бесплатно предоставляется неисключительное право использования, неограниченного копирования и распространения пакета при соблюдении следующих условий:

- Вы признаете приоритет автора пакета, распространяющийся на научные результаты, имеющие научную новизну, и тексты программ, имеющиеся в составе архива примеров `examples.zip`, если относительно них там нет указаний на авторство других лиц;
- при публикации любым способом (включая составление отчетов) результатов научных и/или проектных исследований, полученных с использованием пакета или его частей, факт использования пакета и авторские права на него упоминаются в публикации с указанием источника (сайта пакета);
- передача копий пакета другим лицам производится бесплатно и в полном составе, указанном в п. 1.2 настоящего документа, включая указание авторских прав и настоящую лицензию. При этом получатель (копии) пакета принимает на себя все права и обязанности Пользователя, обусловленные настоящим соглашением;
- Вы не имеете права на вскрытие технологии, декомпиляцию и деассемблирование пакета.

Ограничение ответственности. Пакет передается Пользователю „как есть“ („as is“), без каких-либо гарантий, выраженных явно или подразуемеваемых, включая (но не ограничиваясь ими) подразумеваемые

гарантии удовлетворительного качества и применимости для конкретной цели.

Автор пакета ни в коем случае не несет ответственности (материальной, уголовной или любой другой) за какие-либо убытки и/или ущерб (в том числе, убытки в связи с недополученной коммерческой прибылью, прерыванием коммерческой или производственной деятельности, утратой деловой информации, судебные издержки и иной имущественный ущерб), возникающие в связи с использованием или невозможностью использования пакета.

Список литературы

[1] **Azbelev, N. V., Tsalyuk, V. Z.** *Application of Green's operator to quadratic variational problems.* Opuscula Mathematica, 2006. V. 26, No 2. Pp. 243–256.

[2] **Азбелев Н. В., Култышев С. Ю., Цалюк В. З.** Функционально-дифференциальные уравнения и вариационные задачи. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2006. 122 с. (`http://www.rcd.ru`).

[3] **Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.**. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.

[4] **Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.** Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.

[5] **Дьяконов В. П.** Математическая система Maple V R3/R4/R5. М.: „СОЛОН“. 1998. 400 с.

[6] **Данфорд Н., Шварц Дж. Т.** Линейные операторы. Часть 1. Общая теория.