Пакет $\mathbf{L}_2$: критическая сила для вертикальной стойки*

В. З. Цалюк†

5 апреля 2009 г.

Аннотация

Решение задачи о критической эйлеровой силе для стойки с переменным (вдоль стержня) сечением, выполненным из однородного изотропного упругого материала, с применением процедур пакета.

Содержание

---

*Работа выполнена при поддержке РФФИ и администрации Пермского края (грант № 07–01–96060–р–Урал).

†Кубанский государственный университет, г. Краснодар

E-mail: vts@math.kubsu.ru

1 Постановка задачи

Стержень стойки имеет круглые сечения, радиусы которых образуют профиль

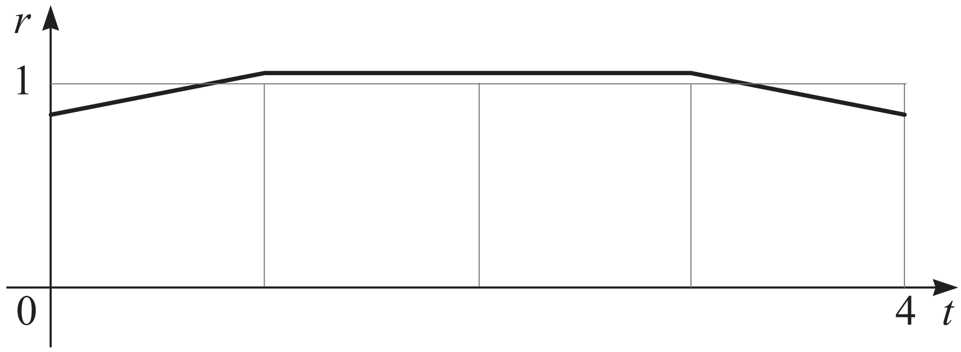

Рис. 1.

Радиус центральной части равен $\sqrt{1.1}$, одинаковые конические концы стержня рассчитаны так, чтобы общее количество материала, затраченного на изготовление стержня, совпадало с требуемым для равномерного стержня радиуса 1.

Под действием продольной сжимающей силы такой стержень имеет плоскую деформацию.

Вариационный принцип Лагранжа: стойка устойчива тогда и только тогда, когда $x(t) \equiv 0$ есть единственная точка минимума для вариационной задачи

$$\begin{aligned} &\mathcal{I}(\mathbf{x}) = \int_0^l \varphi(t)\ddot{x}^2(t) - P\dot{x}^2(t)\,dt \to \min, \\ &x(0) = x(l) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь P — сжимающая продольная сила, $l = 4$ — длина стержня (в несжатом состоянии), $\varphi(t) = EJ(t)$, $J(t) = \dfrac{1}{4}\pi r^4(t)$ — геометрический момент поперечного сечения стержня в точке t. Для модуля Юнга материала стержня положим $E = \dfrac{4}{\pi}$. Тогда $\varphi(t) = r^4(t)$.

Функционал $\mathcal{I}$ будем рассматривать на пространстве $\mathbf{H}^2[0,\, l]$ функций x, представимых в виде

$$x(t) = x(a) + (t-a)\dot{x}(a) + \int_a^t (t-s)\ddot{x}(s)\,ds$$

с $\ddot{x} \in \mathbf{L}_2$.

2 Преобразование задачи

Положим $\psi(t) = \sqrt{\varphi(t)} = r^2(t)$. Тогда задача может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} &\langle \psi\ddot{x},\, \psi\ddot{x}\rangle - P\,\langle \dot{x},\, \dot{x}\rangle \to \min, \\ &x(0) = x(l) = 0, \end{aligned}$$

где $\langle \cdot,\, \cdot\rangle$ — скалярное произведение в пространстве $\mathbf{L}_2(0,\, l)$.

Применим к этой задаче W-метод, суть которого в данном слчае в следующем. ***Модельная краевая задача***

$$\begin{aligned} &\psi(t)\ddot{x}(t) = z(t), \\ &x(0) = x(l) = 0, \end{aligned}$$

имеет единственное решение

$$x = \mathbf{W}\psi^{-1}z, \quad \text{или} \quad x(t) = \int_0^l W(t,\, s)\psi^{-1}(s)z(s)\, ds, \tag{2}$$

где

$$W(t,\, s) = -\frac{1}{l} \cdot \begin{cases} s(l-t), & t \geq s, \\ t(l-s), & t < s, \end{cases}$$

есть функция Грина стандартной двухточечной краевой задачи

$$\begin{aligned} &\ddot{x} = z, \quad (z \in \mathbf{L}_2) \\ &x(0) = x(l) = 0. \end{aligned}$$

Библиотека `bvp_lib.m` имеет процедуру `bvp_KG`, возвращающую это ядро. Заметим, что $\|\mathbf{W}\| = \dfrac{l^2}{\pi^2} \leq 1.62114$.

W-подстановка (2) осуществляет взаимно однозначное соответствие между пространством $\mathbf{L}_2$ и множеством $\mathbf{H}_0^2 \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbf{H}^2 \mid x(0) = x(l) = 0\}$ допустимых функций задачи (1).

Таким образом, задача (1) преобразована в эквивалентную задачу

$$\mathcal{F}(z) = \langle z,\, z\rangle - P\Big\langle \Big(\frac{d}{dt}\mathbf{W}\Big)\psi^{-1}z,\, \Big(\frac{d}{dt}\mathbf{W}\Big)\psi^{-1}z\Big\rangle \to \min,$$

в пространстве $\mathbf{L}_2$, уже без ограничений. Здесь ψ^{-1} — оператор умножения на ограниченную функцию $\dfrac{1}{\psi(t)}$, причем $\|\psi^{-1}\| \leq \sup\limits_{t\in[0,\, l]} \dfrac{1}{|\psi(t)|} < 1.4009$.

Так как $\left(\frac{d}{dt}\mathbf{W}\right)^*\left(\frac{d}{dt}\mathbf{W}\right) = -\mathbf{W}$, задача принимает вид

$$\mathcal{F}(z) = \langle z,\, z\rangle - P\big\langle \mathbf{Q}z,\, z\big\rangle \to \min, \tag{3}$$

где $\mathbf{Q} = -\psi^{-1}\mathbf{W}\psi^{-1}$ — самосопряженный интегральный оператор.

3 Решение задачи

Анализ, основанный на результатах книги [1], приводит к следующему результату. Пусть $r_+(\mathbf{Q}) = \max\big(0,\, \sup\sigma(\mathbf{Q})\big)$.

Теорема 1. *Если*

$$P < P_* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{r_+(\mathbf{Q})}, \tag{4}$$

(при $r_+(\mathbf{Q}) = 0$ мы полагаем $P_* = +\infty$), то задача (3), а значит, и задача (1), имеет единственный минимум.

Если же $P > P_*$, то минимума в этих задачах нет.

Так как оператор $\mathbf{Q}$ положительно определен, то $r_+(\mathbf{Q}) = r(\mathbf{Q})$ — спектральный радиус оператора.

4 Вычисления

В [1] предложен следующий итерационный метод для нахождения спектрального радиуса $r(\mathbf{Q})$ самосопряженного вполне непрерывного оператора $\mathbf{Q} \neq 0$ в гильбертовом пространстве. Выберем стартовую функцию z_0 и положим $z_i = \mathbf{Q}z_{i-1}$ для $i = 1,\, 2,\, \ldots$. Пусть E_1 — ортогональное дополнение ко всем собственным векторам, отвечающим собственным числам, модуль которых равен $r(\mathbf{Q})$.

Теорема 2 ([1, теорема 3.8])**.** *Если $z_0 \notin E_1$, то последовательность чисел $\dfrac{\|z_i\|}{\|z_{i-1}\|}$ имеет своим пределом $r(\mathbf{Q})$.* □

Замечание 1. Сходимость $\dfrac{\|z_i\|}{\|z_{i-1}\|} \to r(\mathbf{Q})$ не медленнее сходимости геометрической прогрессии со знаменателем $q < 1$.

Для производства вычислений оказалось выгодным заменить выражение $\dfrac{1}{r^2(t)}$ на отрезках $[0,\,1]$ и $[3,\,4]$ интерполяционными многочленами. При этом максимальная ошибка не превосходит 0.000167 (файл `approx.mws`). В результате получилась $\mathbf{L}_2$-функция, которую мы обозначим здесь через $\xi(t)$.

Пять итераций, произведенных по программе `round.mws`, позволили заключить, что $r(-\xi\mathbf{W}\xi) \in [1.269,\, 1.270]$.

Ошибка в определении спектрального радиуса

$$\begin{aligned}|r(\mathbf{Q}) - r(-\xi\mathbf{W}\xi)| &\leq \|\mathbf{Q} - (-\xi\mathbf{W}\xi)\| < \\ &< 2 \cdot \|\psi^{-1} - \xi\| \cdot \|\psi^{-1}\| \cdot \|\mathbf{W}\| \leq \\ &\leq 2 \cdot 0.000167 \cdot 1.4009 \cdot 1.62114 < \\ &< 0.0008.\end{aligned}$$

Поэтому $r(\mathbf{Q}) \in [1.268,\, 1.271]$; отсюда $P_* \in [0.7867,\, 0.7887]$. Это заметно больше, чем хорошо известная эйлерова критическая сила для равномерного стержня с сечением радиуса 1, которая равна $\dfrac{\pi^2}{l^2} \approx 0.61685$.

5 Комментарии к файлу `round.mws`

приведены в самом этом файле.

Список литературы

[1] **Азбелев Н. В., Култышев С. Ю., Цалюк В. З.** Функционально-дифференциальные уравнения и вариационные задачи. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2006. 122 с. (`http://www.rcd.ru`).

[2] **N. V. Azbelev, V. Z. Tsalyuk.** *Application of Green's operator to quadratic variational problems..* // Opuscula Mathematica, 2006. V. 26, No 2. Pp. 243-256.