

Численное исследование зависимости критической силы для витого стержня от параметров задачи*

В. З. Цалюк[†]

27 августа 2010 г.

Аннотация

Задача об устойчивости упругой стойки под действием продольно сжимающей силы рассматривается для случая витого (естественно закрученного) стержня.

Результаты численных экспериментов представлены в опубликованной статье [1].

Настоящий текст, по сравнению со статьей, раскрывает несколько подробнее

- преобразование вариационного принципа к виду, использованному для решения задачи;
- некоторые доказательства;
- использование пакета \mathbf{L}_2 в вычислениях.

Хочется отметить, что благодаря использованию пакета \mathbf{L}_2 , осуществляющего точные символьные вычисления с кусочно-полиномиальными функциями, значения критической силы для разнообразных задач получаются с гарантированной точностью при относительно незначительном использовании „человеческого ресурса“.

*© Copyright 2010, VTs (В. З. Цалюк)

[†]Кубанский государственный университет, факультет математики и компьютерных наук, 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149. E-mail: vts@math.kubsu.ru

Содержание	2
------------	---

Содержание

1 Витой стержень	3
2 Теоретические основы метода	4
2.1 Вариационный принцип Лагранжа и его преобразование . .	4
2.2 Решение задачи	7
2.3 Вычисление спектрального радиуса	9
3 Расчеты витого стержня	10
4 Учет дополнительных ограничений	15
5 Витой стержень с заделкой одного конца	17
6 Альтернативный расчет	19
7 Выводы	19
8 Описание файлов архива twisted.zip	20
8.1 Аппроксимация тригонометрических функций	21
8.2 Расчеты витого стержня с шарнирным закреплением концов	22
8.3 Витой стержень с заделкой конца	22
Список литературы	23

1 Витой стержень

Задачи об устойчивости упругой стойки при действии продольно сжимающей силы обычно решаются в случае, когда деформация стержня под критической нагрузкой лежит в одной плоскости. Будем называть такие стержни плоскими. При более сложной форме стержня его деформация выходит за пределы плоскости (трехмерный стержень). В справочнике [2, с. 52] приведены результаты расчетов для так называемого витого (иначе, естественно закрученного) стержня, выполненного из однородного изотропного упругого материала. В качестве такового мы рассмотрим стержень, имеющий в ненапряженном состоянии следующую форму. Если направить вдоль стержня ось Ot так, что стержень изобразится отрезком $t \in [0, l]$, то каждое поперечное сечение представляет собой прямоугольник $[-a, a] \times [-b, b]$ (считаем $b < a$) с центром на оси Ot , повернутый на угол, пропорциональный координате t сечения.

Стержень подвержен продольно сжимающей силе P . При $P < P_{\text{кр}}$ стержень устойчиво сохраняет прямолинейную форму, а при $P > P_{\text{кр}}$ прямолинейная форма неустойчива [3, Глава 4]. Согласно справочнику [2],

$$P_{\text{кр}} = \kappa \frac{\pi^2 B_y}{(\mu l)^2}, \quad (1)$$

где $B_y = \frac{4}{3}ab^3E$ — меньшая главная изгибная жесткость сечения стержня, поправочный коэффициент $\kappa > 1$ зависит от параметров стержня, а „коэффициент длины“ μ отвечает за условия закрепления концов стержня. Для шарнирного закрепления концов $\mu = 1$.

На рис. 49 справочника показан график зависимости коэффициента κ от полного угла закрученности Ψ для стержня, у которого отношение главных жесткостей равно 0.2. Воспроизведем здесь этот график (рис. 1).

Относительно недавно появились новые методы решения и исследования квадратичных вариационных задач [4, 5]. Появилась возможность легко получать значения критической силы с гарантированной точностью. Была совершена попытка повторить новыми средствами зависимость, изображенную на рис. 1. В результате обнаружилось, что зависимость κ от Ψ качественно сложнее, чем это представлялось по данным [2]. Далее, мы произвели несколько более сложных численных экспериментов для выяснения роли параметра μ .

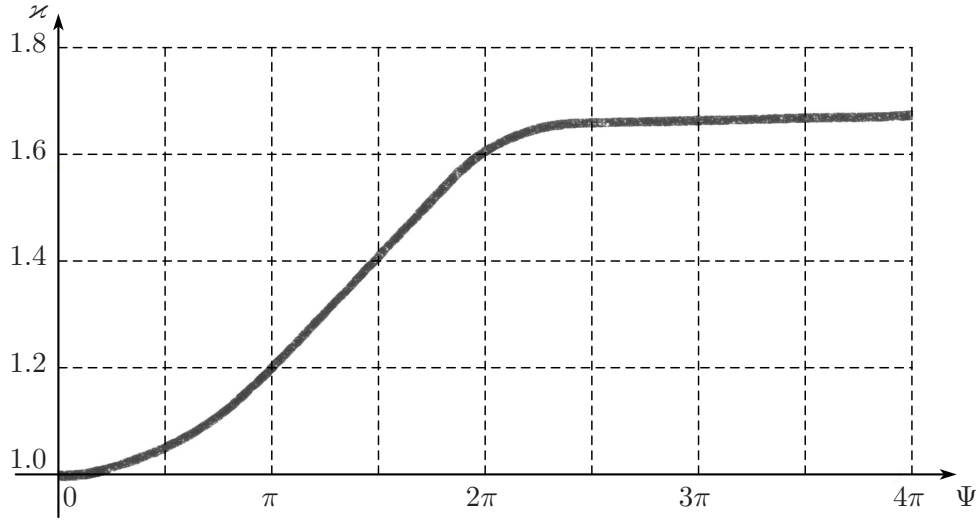


Рис. 1: Из рис. 49 [2].

2 Теоретические основы метода

Для изучения устойчивости стержня был использован вариационный принцип Лагранжа [3] (принцип минимума потенциальной энергии).

В общем случае модуль Юнга $E(t)$ имеет постоянное значение в каждом поперечном сечении $F(t)$. Как $E(t)$, так и $F(t)$ могут зависеть, даже разрывным образом, от t . В ненапряженном состоянии центры тяжести поперечных сечений расположены на оси Ot , тогда

$$\int_{F(t)} v_1 dv_1 dv_2 = \int_{F(t)} v_2 dv_1 dv_2 = 0. \quad (2)$$

2.1 Вариационный принцип Лагранжа и его преобразование

Пусть вектор-функция $\mathbf{x} : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ с координатами $(x_1(t), x_2(t))^T$ описывает поперечное отклонение центральной точки сечения с координатой t от положения равновесия в результате деформации.

Следуя [3, с. 387–388], мы принимаем **гипотезу плоских сечений**

и получаем [3, с. 393] функционал Лагранжа

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}, y) = \int_0^l \int_{F(t)} \frac{1}{2} E \left(\dot{y} + \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}) - v_1 \ddot{x}_1 - v_2 \ddot{x}_2 \right)^2 dv_1 dv_2 dt + Py(l)$$

(где $\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, x_2)^\top$, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} u_1 v_1 + u_2 v_2$ — скалярное произведение двумерных векторов, $\dot{\cdot} = \frac{d}{dt}$) с ограничениями

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(l) = \mathbf{0}, \quad y(0) = 0.$$

В отличие от [3], мы ставим вариационную задачу на минимум. Обозначим

$$\varphi_{ij}(t) = E(t)I_{ij}(t) = E(t) \int_{F(t)} v_i v_j dv_1 dv_2, \quad i, j = 1, 2,$$

и введем матрицу

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) \\ \varphi_{12}(t) & \varphi_{22}(t) \end{pmatrix}$$

изгибных жесткостей. Учтем равенства (2). Тогда получим

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}, y) = \frac{1}{2} \int_0^l E(t)F(t) \left(\dot{y} + \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}) \right)^2 + (\ddot{\mathbf{x}}, \varphi \ddot{\mathbf{x}}) dt + Py(l). \quad (3)$$

Здесь площадь сечения $F(t)$ обозначается этим же символом $F(t)$. Из контекста всегда ясно, когда имеется в виду геометрическая фигура, а когда ее площадь.

Естественно считать, что

$$\begin{aligned} \text{H1)} \quad & \text{функция } E(t)F(t) \text{ измерима, } \sup_{t \in [0, l]} E(t)F(t) < \infty \\ & \text{и } \inf_{t \in [0, l]} E(t)F(t) > 0; \end{aligned}$$

Н2) функции $\varphi_{ij}(t)$ измеримы и равномерно ограничены.

В этих предположениях функционал \mathcal{J} определен, и его естественно рассматривать, на произведении соболевских пространств $\mathbf{H}^2([0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2) \times \mathbf{H}^1([0, l] \rightarrow \mathbb{R})$. В этих пространствах выберем нормы

$$\|\mathbf{x}\| = |\mathbf{x}(0)| + |\mathbf{x}(l)| + \left(\int_0^l (\ddot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) dt \right)^{1/2},$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма двумерного вектора, и

$$\|y\| = |y(0)| + \left(\int_0^l |\dot{y}(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Устойчивое состояние равновесия $(\mathbf{0}, \hat{y})$ должно доставлять минимум в вариационной задаче

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{x}, y) &\rightarrow \min, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(l) &= \mathbf{0}, \quad y(0) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В интересующем нас состоянии равновесия вариация функционала \mathcal{J} равна нулю. Варьируя y и подставив $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$, откуда получаем

$$EF\dot{\hat{y}} = -P, \quad \hat{y}(t) = -P \int_0^t \frac{ds}{EF}. \quad (5)$$

Подставим в (3) $\hat{y} + \delta y$ вместо y . Тогда, в силу (5),

$$\mathcal{J}(0 + \mathbf{x}, \hat{y} + \delta y) = \mathcal{J}(0, \hat{y}) + \frac{1}{2}\mathcal{I}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\mathcal{R}(\mathbf{x}, \delta y),$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\mathbf{x}) &= \int_0^l (\ddot{\mathbf{x}}, \varphi \ddot{\mathbf{x}}) - P(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}) dt, \\ \mathcal{R}(\mathbf{x}, \delta y) &= \int_0^l EF \left(\delta \dot{y} + \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}) \right)^2 dt \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, если квадратичный функционал \mathcal{I} строго положительно определен на подпространстве \mathbf{H}_0^2 пространства $\mathbf{H}^2([0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2)$, где

$$\mathbf{H}_0^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} : \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(l) = \mathbf{0}\},$$

то есть задача

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(x) &\rightarrow \min, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(l) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6)$$

имеет в точке $\mathbf{0}$ единственный минимум, то пара $(\mathbf{0}, \hat{y})$ доставляет задачу (4) единственный минимум, и стойка устойчива.

Если же функционал \mathcal{I} не является положительно определенным, то существует такое отклонение \mathbf{x} , что $\mathcal{I}(\mathbf{x}) < 0$. Вследствие оценок

$$\sup_{t \in [0, l]} |\dot{\mathbf{x}}(t)| \leq |\dot{\mathbf{x}}(a)| + \sqrt{l} \left(\int_0^l (\ddot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t)) dt \right)^{1/2} \leq \text{const} \cdot \|\mathbf{x}\| \quad \text{имеем}$$

$|\mathcal{R}(\mathbf{x}, 0)| \leq \text{const} \cdot \|\mathbf{x}\|^4$. При достаточно малых α и $\delta y = 0$ получаем $\mathcal{J}(0 + \alpha \mathbf{x}, \hat{y}) - \mathcal{J}(0, \hat{y}) < 0$, то есть минимума в точке $(\mathbf{0}, \hat{y})$ нет, и стойка неустойчива.

Таким образом, в преобразованном вариационном принципе участвуют только (двумерные) поперечные отклонения оси стержня: *прямолинейное состояние стойки устойчиво, если и только если состояние равновесия $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ доставляет единственный минимум в вариационной задаче*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\mathbf{x}) &= \int_0^l (\ddot{\mathbf{x}}, \varphi \ddot{\mathbf{x}}) - P(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}) dt \rightarrow \min, \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}(l) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь краевые условия отвечают шарнирному закреплению концов стержня.

2.2 Решение задачи

Вследствие неравенства Коши–Буняковского

$$\det \varphi(t) = \varphi_{11}(t)\varphi_{22}(t) - \varphi_{12}^2(t) > 0.$$

Поэтому матрица $\varphi(t)$ строго положительно определена при каждом t . Мы будем полагать, что

$$\text{H3) } \inf_{t \in [a, b]} \det \varphi(t) > 0.$$

Тогда [6, Теорема V.6.2] существует симметричная строго положительно определенная матрица $\psi(t) = \sqrt{\varphi(t)}$, то есть такая, что $\psi^2(t) = \varphi(t)$; и $\inf_{t \in [a, b]} \det \psi(t) > 0$. Функционал $\mathcal{I} : \mathbf{H}_0^2 \rightarrow \mathbb{R}$ приобретает вид

$$\mathcal{I}(x) = \int_0^l (\psi \ddot{\mathbf{x}}, \psi \ddot{\mathbf{x}}) - P(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}) dt.$$

Идея W -метода состоит в переводе квадратичной вариационной задачи в пространство \mathbf{L}_2 квадратично суммируемых функций. Для этого используется так называемая *модельная краевая задача*, которая для нашей вариационной задачи имеет вид

$$\psi(t)\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{z}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(l) = \mathbf{0}.$$

Единственное решение этой задачи определяется равенством

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\psi^{-1}\mathbf{z}, \quad (8)$$

где \mathbf{G} — скалярный интегральный оператор с ядром

$$G(t, s) = -\frac{1}{l} \cdot \begin{cases} s(l-t), & t \geq s, \\ t(l-s), & t < s. \end{cases}$$

Это функция Грина стандартной (скалярной) краевой задачи $\ddot{x} = z$ ($z \in \mathbf{L}_2$), $x(0) = x(l) = 0$. В пространстве $\mathbf{L}_2([0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2)$ оператор \mathbf{G} действует покомпонентно.

Отображение (8) осуществляет взаимно однозначное соответствие между гильбертовым пространством $\mathbf{L}_2([0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2)$ со скалярным произведением $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_0^l (\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)) dt$, с одной стороны, и подпространством \mathbf{H}_0^2 , состоящим из допустимых функций задачи (6), с другой.

Задача (6) этим отображением преобразуется в следующую задачу в пространстве $\mathbf{L}_2([0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2)$:

$$\mathcal{F}(\mathbf{z}) = \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle - P \left\langle \left(\frac{d}{dt} \mathbf{G} \right) \psi^{-1} \mathbf{z}, \left(\frac{d}{dt} \mathbf{G} \right) \psi^{-1} \mathbf{z} \right\rangle \rightarrow \min,$$

которая уже не имеет ограничений.

Так как $\left(\frac{d}{dt} \mathbf{G} \right)^* \left(\frac{d}{dt} \mathbf{G} \right) = -\mathbf{G}$, в чем можно убедиться вычислением ядра интегрального оператора в левой части этого равенства, то задача принимает вид

$$\mathcal{F}(\mathbf{z}) = \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle + P \langle \psi^{-1} \mathbf{G} \psi^{-1} \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle \rightarrow \min. \quad (9)$$

Другой способ получить задачу (9) — в (7) взять по частям интеграл $\int_0^l (\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}) dt = - \int_0^l (\mathbf{x}, \ddot{\mathbf{x}}) dt = - \langle \mathbf{G} \psi^{-1} \mathbf{z}, \psi^{-1} \mathbf{z} \rangle$.

Так как оператор $-\mathbf{Q}$ положительно определен, то из [5, § 3.1] следует

Теорема 1. Если

$$P < P_{\text{кр}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{r(\mathbf{Q})} \quad (10)$$

($r(\cdot)$ — спектральный радиус оператора), то задача (9), а, следовательно, и (7), имеет единственный минимум.

Если $P > P_{\text{кр}}$, то минимума нет.

Таким образом, формула (10) дает критическое значение силы, при котором стойка теряет устойчивость.

2.3 Вычисление спектрального радиуса

Различные методы нахождения спектрального радиуса $r(\mathbf{Q})$ самосопряженного вполне непрерывного оператора $\mathbf{Q} \neq 0$ в гильбертовом пространстве рассмотрены в [7, § 12], [6, § XV.2], [8, § 9]. Мы используем здесь метод, близкий к методу Коллатца. На наш взгляд, выбранный метод отличается простотой реализации и наилучшим образом приспособлен для расчетов в среде пакета символьных вычислений.

Выберем z_0 и положим $z_i = \mathbf{Q}z_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$. Пусть E — ортогональное дополнение ко всем собственным векторам, отвечающим собственным числам, модуль которых равен $r(\mathbf{Q})$.

Теорема 2. *Последовательность чисел $\frac{\|z_i\|}{\|z_{i-1}\|}$ неубывает. Если $z_0 \notin E$, то*

$$\frac{\|z_i\|}{\|z_{i-1}\|} \rightarrow r(\mathbf{Q}) \quad (11)$$

Сходимость не хуже сходимости суммы членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{r(\mathbf{Q}|_E)}{r(\mathbf{Q})} < 1$, где $\mathbf{Q}|_E$ — сужение оператора \mathbf{Q} на подпространство E .

Доказательство. Сходимость доказана в [5, теорема 3.8].

Для доказательства неравенства

$$\frac{\|\mathbf{Q}^2 z\|}{\|\mathbf{Q} z\|} \geq \frac{\|\mathbf{Q} z\|}{\|z\|}. \quad (12)$$

используем спектральное разложение $\varphi(\mathbf{Q}) = \int \varphi(\tau) dI_\tau$, где I_τ — спектральная функция оператора \mathbf{Q} , а интеграл берется по отрезку, содержащему внутри себя спектр оператора \mathbf{Q} (см. [6, § V.6 и § IX.5]).

Из этой формулы вытекают равенства $\|z\|^2 = \langle z, z \rangle = \int 1 d\langle I_\tau z, z \rangle$, $\|\mathbf{Q} z\|^2 = \langle \mathbf{Q}^2 z, z \rangle = \int \tau^2 d\langle I_\tau z, z \rangle$ и, аналогично, $\|\mathbf{Q}^2 z\|^2 = \int \tau^4 d\langle I_\tau z, z \rangle$.

Желаемое неравенство (12) эквивалентно неравенству

$$\left(\int \tau^2 d\langle I_\tau z, z \rangle \right)^2 \leq \int 1 d\langle I_\tau z, z \rangle \cdot \int \tau^4 d\langle I_\tau z, z \rangle.$$

Функция $\tau \mapsto \langle I_\tau z, z \rangle$ — неубывающая и поэтому порождает на ограниченном интервале σ -аддитивную конечную меру. Поэтому последнее неравенство следует из неравенства Коши–Буняковского. \square

Замечание 1. В файле `zip://iters.zip/Convergence.pdf` имеется доказательство аналогичных утверждений без предположения о полной непрерывности оператора. В этом же документе приводятся результаты вычислительных экспериментов по определению характера сходимости (11) для самосопряженных операторов, не являющихся вполне непрерывными.

3 Расчеты витого стержня

Мы приняли постоянную скорость закрутки стержня, так что $\Psi = \frac{\pi}{2}l$, и варьировали его длину. Для такого стержня имеем (расчеты см. в файле `calc.mws`)

$$\varphi(t) = \frac{2E}{3}ab \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + (a^2 - b^2) \cos \pi t & (a^2 - b^2) \sin \pi t \\ (a^2 - b^2) \sin \pi t & a^2 + b^2 - (a^2 - b^2) \cos \pi t \end{pmatrix},$$

$$\varphi^{-1}(t) = \frac{3}{8a^3b^3E} \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - (a^2 - b^2) \cos \pi t & -(a^2 - b^2) \sin \pi t \\ -(a^2 - b^2) \sin \pi t & a^2 + b^2 + (a^2 - b^2) \cos \pi t \end{pmatrix},$$

и, окончательно,

$$\psi^{-1}(t) = \sqrt{\varphi^{-1}(t)} = \frac{\sqrt{3}}{4ab\sqrt{Eab}} A(t),$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} a + b - (a - b) \cos \pi t & -(a - b) \sin \pi t \\ -(a - b) \sin \pi t & a + b + (a - b) \cos \pi t \end{pmatrix}, \quad (13)$$

(заметим, что $\det A(t) \equiv 4ab$, $\|A(t)\| \equiv 2a$) и, в результате,

$$\varkappa = \frac{4a^2}{\pi^2} \cdot \frac{l^2}{r(\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A})}, \quad (14)$$

где \mathbf{A} — оператор умножения на матрицу $A(t)$.

Скорость сходимости метода, описанного в п. 2.3, очень существенна, так как каждая следующая итерация выполняется с более сложными выражениями — и, следовательно, дольше — чем предыдущая. Теорема 2 гарантирует сходимость со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем, равным отношению второго собственного числа к старшему первому. Поэтому для ускорения сходимости полезно выделить инвариантное подпространство оператора \mathbf{AGA} и производить итерации в нем. В этом подпространстве появится лишь часть собственных чисел оператора, в результате чего знаменатель прогрессии может стать меньше.

Задача (7) инвариантна относительно преобразования

$$\mathbf{z}(t) \mapsto (\mathbf{S}\mathbf{z})(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi \\ \sin \Psi & -\cos \Psi \end{pmatrix} \mathbf{z}(l-t),$$

квадрат которого есть тождественный оператор.

Рассмотрим подпространства

$$\begin{aligned} S^+ &= \{\mathbf{z} : \mathbf{S}\mathbf{z} = \mathbf{z}\}, \\ S^- &= \{\mathbf{z} : \mathbf{S}\mathbf{z} = -\mathbf{z}\}. \end{aligned}$$

Имеем

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{z} + \mathbf{S}\mathbf{z}}{2} + \frac{\mathbf{z} - \mathbf{S}\mathbf{z}}{2} \Rightarrow \mathbf{L}_2 = S^+ \oplus S^-.$$

Лемма 1. а) Оператор S самосопряжен;

б) $\langle \mathbf{S}\mathbf{u}, \mathbf{S}\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{S}^2\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$;

в) $S^+ \perp S^-$;

г) $\mathbf{Q}\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{Q}$;

д) $\mathbf{Q}(S^+) = S^+$, $\mathbf{Q}(S^-) = S^-$;

е) если $\mathbf{Q}\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}$, то $\mathbf{Q}\mathbf{S}\mathbf{z} = \lambda\mathbf{S}\mathbf{z}$;

ж) каждому собственному значению λ соответствует собственная функция $\in S^+$ или $\in S^-$.

Доказательство. Мы многократно используем тот факт, что оператор умножения на матрицу-константу коммутирует со скалярным линейным оператором, действующим покомпонентно.

а) Матрица $R = \begin{pmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi \\ \sin \Psi & -\cos \Psi \end{pmatrix}$ и оператор $\mathbf{z}(t) \mapsto \mathbf{z}(l-t)$ коммутируют и самосопряжены.

б) очевидно следует из а);

в) $\mathbf{u} \in S^+$, $\mathbf{v} \in S^- \Rightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{S}\mathbf{u}, \mathbf{S}\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, -\mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

г) Вместо оператора \mathbf{Q} рассмотрим пропорциональный ему оператор \mathbf{AGA} .

Имеем $(\mathbf{ASz})(t) = A(t)Rz(l-t)$ и $(\mathbf{SAz})(t) = RA(l-t)z(l-t)$; тождество $A(t)R = RA(l-t)$ получается непосредственным счетом с использованием формул суммирования из тригонометрии; так что \mathbf{A} коммутирует с \mathbf{S} .

\mathbf{G} коммутирует с оператором $\mathbf{z}(t) \mapsto \mathbf{z}(l-t)$ и с матрицей R ; так что \mathbf{G} коммутирует с \mathbf{S} .

Отсюда и \mathbf{AGA} коммутирует с \mathbf{S} .

д) $\mathbf{z} \in S^+ \Rightarrow \mathbf{Sz} = \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{SQz} = \mathbf{QSz} = \mathbf{Qz} \Rightarrow \mathbf{Qz} \in S^+$.

ж) Если \mathbf{z} удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{Qu} = \lambda \mathbf{u}, \quad (15)$$

то, в силу г), функции $\frac{\mathbf{z} + S\mathbf{z}}{2} \in S^+$ и $\frac{\mathbf{z} - S\mathbf{z}}{2} \in S^-$ удовлетворяют уравнению (15), и по крайней мере одна из них отлична от 0. \square

Вывод: для ускорения сходимости можно брать начальные функции из подпространств S^+ и S^- , впоследствии выбирая тот процесс, который приведет к большему значению. В качестве начальных функций мы выбираем функции-константы, пропорциональные следующим:

$$\mathbf{z}_0 \equiv \left(\cos \frac{\Psi}{2}, \sin \frac{\Psi}{2} \right)^T \in S^+, \quad \mathbf{z}_0 \equiv \left(\sin \frac{\Psi}{2}, -\cos \frac{\Psi}{2} \right)^T \in S^-.$$

Для удобства применения пакета тригонометрические функции в (13) были заменены кусочно-многочленными функциями:

$$\cos \pi t \approx C(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} p(\frac{1}{2} - t), & t \in (0, \frac{1}{2}], \\ -p(t - \frac{1}{2}), & t \in (\frac{1}{2}, 1], \\ \dots & \dots \end{cases}$$

$$\sin \pi t \approx S(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} p(t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ p(1 - t), & t \in (\frac{1}{2}, 1], \\ \dots & \dots \end{cases}$$

где $p(t) = -\frac{66}{119}t^7 + \frac{61}{24}t^5 - \frac{1793}{347}t^3 + \frac{355}{113}t$ равномерно приближает функцию $\sin \pi t$ на отрезке $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Погрешность аппроксимации не превосходит $0.31 \cdot 10^{-5}$ (см. `approx.mws`).

В результате вместо оператора **A** умножения на матрицу $A(t)$ появился оператор **B** умножения на кусочно-многочленную матрицу $B(t)$, приблизительно равную $A(t)$. Имеем следующую оценку возникающей от этого погрешности:

$$|r(\mathbf{BGB}) - r(\mathbf{AGA})| < a(a-b)l^2 \cdot 0.252 \cdot 10^{-5}. \quad (16)$$

Рассчитывался стержень, по своим параметрам $a = 1$, $b = 4/9$, $E = 1$ близкий к стержню, рассмотренному в [2]: $B_y/B_x = b^2/a^2 \approx 0.1975 \approx 0.2$.

Метод теоремы 2 применялся к оператору **BGB**. В силу точного характера символьных вычислений с рациональными дробями в **Maple**, единственным источником погрешности при этом является прекращение итераций. Общая схема документа **Maple**, реализующего итерации, содержится в файле `iters.mws`.

Приведем для примера типичный расчет ($l = 2$, $\Psi = \pi$). Для начальной функции $\mathbf{z}_0(t) \equiv (1, 0)^T$ последовательность приближений к $r(\mathbf{BGB})$ (полученная применением файла `iters49_2.mws`) приведена в таблице.

i	$\frac{\ \mathbf{z}_i\ }{\ \mathbf{z}_{i-1}\ }$
1	1.086560086
2	1.347826786
3	1.348285710
4	1.348286675
5	1.348286677

Отсюда заключаем, что

$$r(\mathbf{BGB}) \in [1.3482866, 1.3482867].$$

В силу (16),

$$r(\mathbf{AGA}) \in [1.3482810, 1.3482923].$$

Затем, согласно формуле (14), $\varkappa \in [1.202364, 1.202375]$. Окончательно имеем $\varkappa = 1.20235 \pm 0.5 \cdot 10^{-4}$.

Было рассчитано более 50 значений l , находящихся в пределах от 0 до 10.1, что соответствует $\Psi \in (0, 5.05\pi]$. Интервальные оценки для \varkappa позволяли выписывать значения этого параметра с погрешностью, не превосходящей $0.5 \cdot 10^{-4}$. Начало кривой хорошо повторяет рис. 1. А ее продолжение (рис. 2) качественно отличается от изображенного на рис. 1.

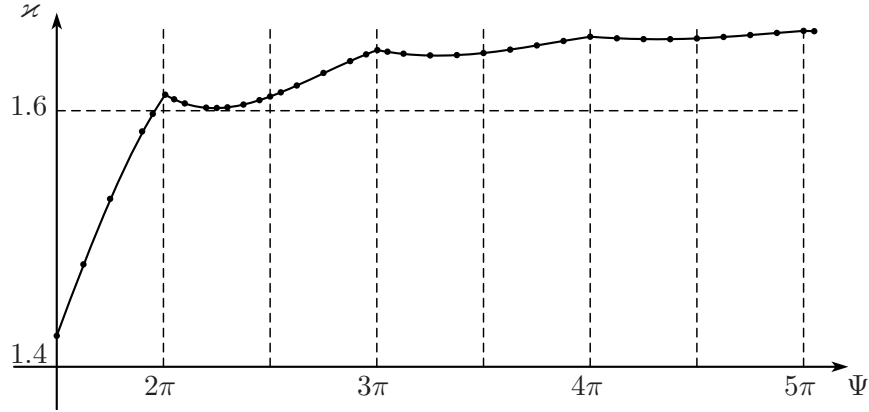


Рис. 2: Зависимость κ от Ψ для $b/a = 4/9$. Отмечены полученные расчетные точки

На основании расчетов с указанной точностью можно сделать следующие выводы. Зависимость κ от Ψ , вопреки тому, что нарисовано в [2], не монотонная и не гладкая. Немного правее точек 2π , 3π и 4π (примерно в точках 2.01π , 3.003π и 4.001π) график имеет „зубцы“ — точки, в которых производная функции скачкообразно меняется с положительного значения на отрицательное. Между зубцами график имеет гладкие „впадины“.

Попытка математического объяснения такого явления зубцов и впадин состоит в следующем. Рассмотрим зависимость спектрального радиуса оператора \mathbf{AGA} от Ψ в каждом из инвариантных подпространств S^+ и S^- отдельно. Графики для спектральных радиусов, приведенных к единичной длине стержня, приведены на рис. 3.

Отсюда следует, что для всего пространства \mathbf{L}_2 график зависимости $\frac{r(\mathbf{AGA})}{l^2}$ от Ψ имеет кусочно-гладкий вид, с „зубцами, направленными вниз“. А обратно пропорциональная величина как раз и есть коэффициент κ .

Объяснение с точки зрения механики явления зубцов и впадин, а также смещения зубцов вправо, еще предстоит найти.

Приведем рисунок, не только уточняющий, но и дополняющий данные [2] для некоторых значений b/a (рис. 4).

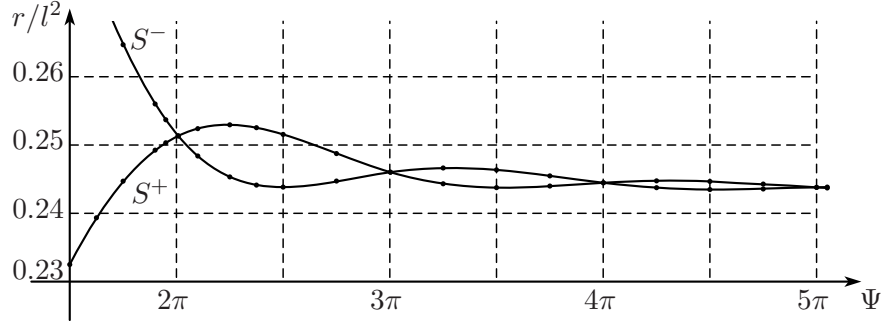


Рис. 3: Две ветви собственных чисел

4 Учет дополнительных ограничений

Дополнительные связи, например, заделка одного из концов стержня, приводят к следующей вариационной постановке задачи: *прямолинейное состояние стойки устойчиво, если и только если состояние равновесия $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ доставляет единственный минимум в вариационной задаче*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\mathbf{x}) &= \int_0^l (\ddot{\mathbf{x}}, \varphi \ddot{\mathbf{x}}) - P(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}) dt \rightarrow \min, \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}(l) = 0, \\ \ell^i \mathbf{x} &= 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (17)$$

Линейные непрерывные функционалы ℓ^i (определенные на пространстве $\mathbf{H}^2([0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2)$) описывают эти дополнительные ограничения.

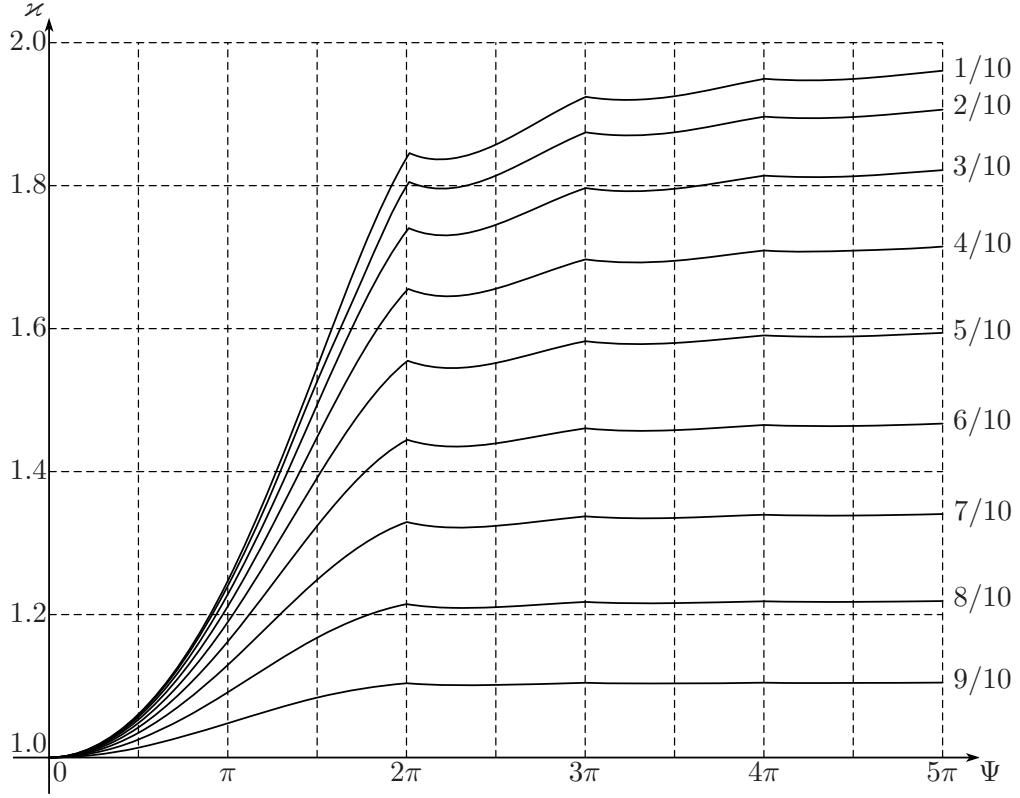
Согласно теореме Рисса, существуют такие $\mathbf{l}^i = (\mathbf{G}\psi^{-1})^* \ell^i \in \mathbf{L}_2([0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2)$, что условие $\ell^i \mathbf{x} = 0$ при замене (8) эквивалентно условию $\langle \mathbf{l}^i, \mathbf{z} \rangle = 0$. Тогда задача об устойчивости сводится к исследованию положительной определенности квадратичной формы

$$\mathcal{F}(\mathbf{z}) = \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle + P\langle \mathbf{Q}\mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle$$

на подпространстве $Z \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{l}^1, \dots, \mathbf{l}^m\}^\perp$,

или, что эквивалентно, положительной определенности на Z оператора $I + P(I - \mathbf{P})\psi^{-1}\mathbf{G}\psi^{-1}$,

или положительной определенности на $\mathbf{L}_2([0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2)$ оператора $I + P(I - \mathbf{P})\psi^{-1}\mathbf{G}\psi^{-1}(I - \mathbf{P})$,

Рис. 4: Зависимость κ от Ψ для значений b/a от $1/10$ до $9/10$.

где \mathbf{P} — ортогональный проектор на линейную оболочку Z^\perp системы функций \mathbf{l}^i , $i = 1, \dots, m$.

Рассматриваемые операторы — интегральные и самосопряженные в соответствующих пространствах. Согласно теореме 1, критическое значение силы определяется формулой

$$P_{\text{кр}} = \frac{1}{r((I - \mathbf{P})\psi^{-1}\mathbf{G}\psi^{-1})} = \frac{1}{r((I - \mathbf{P})\psi^{-1}\mathbf{G}\psi^{-1}(I - \mathbf{P}))},$$

где первый из спектральных радиусов вычисляется в подпространстве Z , а второй — во всем \mathbf{L}_2 . Значение спектрального радиуса можно вычислить методом, рассмотренным в теореме 2.

5 Витой стержень с заделкой одного конца

Вернемся к формуле

$$P_{\text{кр}} = \varkappa \frac{\pi^2 B_y}{(\mu l)^2}. \quad (1)$$

Очевидно, что различие коэффициентов \varkappa и μ в агрегате $\alpha = \frac{\varkappa}{\mu^2}$ имеет смысл только в том случае, когда \varkappa не зависит от „характера закрепления концов стержня“ [2], который определяет, в свою очередь, значение „коэффициента длины“ μ . Для изучения зависимости μ от параметров витого стержня нами были проделаны численные эксперименты со стойкой такой же формы, что и выше, но усиленной заделкой конца $t = 0$; это приводит к дополнительным краевым условиям $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.

Согласно [2], для плоского стержня при таких же условиях закрепления концов значение коэффициента длины $\mu = 0.699$.

Условие заделки порождает, в силу подстановки (8), ограничение вида $\int_0^l G'_t(0, s) \psi^{-1}(s) \mathbf{z}(s) ds = 0$; отсюда, с точностью до постоянного множителя,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^1(t) &= (t-l)(a+b-(a-b)\cos\pi t, -(a-b)\sin\pi t)^\top, \\ \mathbf{I}^2(t) &= (t-l)(-(a-b)\sin\pi t, a+b+(a-b)\cos\pi t)^\top. \end{aligned}$$

Для удобства применения пакета \mathbf{L}_2 мы ортогонализировали эту систему векторов и заменили полученные вектор-функции их кусочно-полиномиальными аппроксимациями $\tilde{\mathbf{I}}^i$; затем рассчитывали относительную

погрешность аппроксимации $\frac{\|\tilde{\mathbf{I}}^i - \mathbf{I}^i\|}{\|\mathbf{I}^i\|}$ (файлы `app*_*.mws`). Для поро-

жденного ими проектора $\tilde{\mathbf{P}}$ погрешность $\|\tilde{\mathbf{P}} - \mathbf{P}\|$ оценивалась с помощью следующей леммы.

Лемма 2. Пусть \mathbf{P} — ортогональный проектор на линейную оболочку ортонормированной системы векторов l^1, \dots, l^m . Если $\|\tilde{l}^i - l^i\| \leq \varepsilon$ для $i = 1, \dots, m$, где $m(2 + \varepsilon)\varepsilon < 1$, и $\tilde{\mathbf{P}}$ — ортогональный проектор на линейную оболочку векторов $\tilde{l}^1, \dots, \tilde{l}^m$, то

$$\|\tilde{\mathbf{P}} - \mathbf{P}\| \leq \varepsilon \frac{m(m+1)(2+\varepsilon)}{1-2m\varepsilon-m\varepsilon^2}. \quad (18)$$

Доказательство. Проекторы имеют вид

$$\mathbf{P}z = \sum_{i=1}^m \langle l^i, z \rangle l^i, \quad \tilde{\mathbf{P}}z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \gamma_{ij} \langle \tilde{l}^j, z \rangle \tilde{l}^i, \quad (19)$$

где $\Gamma = (\gamma_{ij})_{i,j=1}^m = G^{-1}$, $G = (\langle \tilde{l}^i, \tilde{l}^j \rangle)_{i,j=1}^m$ — матрица Грама векторов \tilde{l}^i .

Пусть $E = (\delta^{ij})_{i,j=1}^m = (\delta_{ij})_{i,j=1}^m$ — единичная матрица.

Тогда $|\langle \tilde{l}^i, \tilde{l}^j \rangle - \delta^{ij}| \leq \varepsilon_g \stackrel{\text{def}}{=} 2\varepsilon + \varepsilon^2$.

Из тождества $\Gamma - E = E - G + \Gamma(E - G)^2$ имеем

$$|\gamma_{ij} - \delta_{ij}| \leq \varepsilon_\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_g + \frac{m\varepsilon_g^2}{1 - m\varepsilon_g},$$

так как $|\Gamma| = |(E - (E - G))^{-1}| \leq (1 - |E - G|)^{-1} \leq (1 - m\varepsilon_g)^{-1}$.

Пусть $\|z\| = 1$. Согласно (19), $\|\tilde{\mathbf{P}}z - \mathbf{P}z\| \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |\gamma_{ij} - \delta_{ij}| |\langle \tilde{l}^j, z \rangle| \|\tilde{l}^i\| + \sum_{i=1}^m |\langle \tilde{l}^j - l^j, z \rangle| \|\tilde{l}^i\| + \sum_{i=1}^m |\langle l^i, z \rangle| \|\tilde{l}^i - l^i\| \leq m^2\varepsilon_\gamma(1 + \varepsilon)^2 + m\varepsilon(2 + \varepsilon)$. Объединив все оценки, получаем (18). \square

На этом основании получали оценку погрешности

$$\Delta r \stackrel{\text{def}}{=} |r((I - \tilde{\mathbf{P}})\mathbf{BGB}(I - \tilde{\mathbf{P}})) - r((I - \mathbf{P})\mathbf{AGA}(I - \mathbf{P}))|. \quad (20)$$

Эти вычисления приведены в файлах `app*_* .mws`.

Далее, файлы `itersfix*_* .mws` содержат алгоритм вычисления спектрального радиуса для оператора $(I - \tilde{\mathbf{P}})\mathbf{BGB}$ в пространстве Z методом, рассмотренным в теореме 2 (ядро интегрального оператора $\tilde{\mathbf{P}}$ легко строится с использованием процедуры `l2m_FKprojector` пакета `L2`). В результате получается интервальная оценка для $r((I - \tilde{\mathbf{P}})\mathbf{BGB}(I - \tilde{\mathbf{P}}))$, расширение которой в силу оценки погрешности (20) дает интервал для $r((I - \mathbf{P})\mathbf{AGA}(I - \mathbf{P}))$.

Задачи с обоими шарнирными концами решаются в файлах `iters*_* .mws`. В результате сравнения мы получаем двустороннюю (интервальную) оценку параметра $\mu = \sqrt{\frac{r((I - \mathbf{P})\mathbf{AGA}(I - \mathbf{P}))}{r(\mathbf{AGA})}}$ при условии, что μ зависит только от формы стержня, а не от условий закрепления его концов.

Длины полученных интервалов позволяют выписать значение μ с ошибкой, не превосходящей $0.5 \cdot 10^{-3}$ (см. таблицу).

Для плоского стержня (т.е. для $\Psi = 0$) контрольный расчет трехмерной задачи нашими методами легко дал значение $\mu = 0.699156 \pm 0.5 \cdot 10^{-6}$, что соответствует значению $\mu = 0.699$ из [2].

Таким образом, значение μ зависит как от полного угла закрученности Ψ , так и от b/a , то есть от отношения главных изгибных жесткостей.

Ψ	$\mu, \pm 0.5 \cdot 10^{-3}$	
	$b/a = 4/9$	$b/a = 1/10$
0	0.699	0.699
$\frac{\pi}{20}$	0.698	0.671
$\frac{3\pi}{20}$	0.688	0.534
$\frac{\pi}{4}$	0.6705	0.4535

Возможно, для стержня с таким экстремально вытянутым сечением $b/a = 1/10$ рассмотренная модель недостаточно адекватна (можно подвергнуть сомнению гипотезу плоских сечений), но эти расчеты показывают теоретическую неприменимость концепции коэффициента длины для неплоских стержней.

6 Альтернативный расчет

Чтобы устранить естественно возникающие сомнения, был произведен расчет параметра μ для $\Psi = \frac{\pi}{4}$ и $b/a = 1/10$ методом типа Ритца–Галеркина. Этот расчет подтвердил вывод о том, что $\mu \neq 0.699$.

Так как пакет **L**₂ не использовался в этом расчете, то описание его здесь не приводится.

7 Выводы

1) Предложен эффективный метод решения задач с применением пакета **L**₂, позволяющий несложно получать результаты с легко контролируемой погрешностью. Эта технология стала доступной только при современном уровне развития компьютерной техники и программных средств.

2) В результате численных экспериментов были обнаружены новые качественные закономерности в зависимости критической силы от па-

раметров витого стержня и характера закрепления его концов. Явление „зубцов“ и „впадин“ объясняется спектральными свойствами возникающих в задаче операторов в пространстве квадратично суммируемых функций. Объяснение с точки зрения механики как этого явления, а так и смещения зубцов вправо, еще предстоит найти.

3) Концепция „коэффициента длины“ очевидно применима в случае плоского стержня. Но ее распространение на трехмерные стержни, а тем более использование значений μ из таблиц Главы 1 [2], рассчитанных для плоских стержней, приводит к ошибочным оценкам критической силы. По-видимому, вместо (1) следует писать просто

$$P_{\text{кр}} = \alpha \frac{\pi^2 B_y}{l^2}$$

и для каждого варианта заделки концов (и дополнительных опор) отдельно описывать зависимость α от Ψ и b/a наподобие того, как представлено на рис. 4.

8 Описание файлов архива twisted.zip

Расчеты производились с использованием пакета **L₂** [9], предназначенного для производства точных вычислений с кусочно-многочленными функциями с рациональными коэффициентами в среде системы символьных вычислений **Maple V R4**.

Для того, чтобы повторить описанные в статье расчеты, необходимо

- 1) установить на компьютере систему символьных вычислений (компьютерной алгебры) **Maple V Release 4.00a**. В версии MPR4 Campus Wide Version она легально доступна бесплатно [10, с. 99] и устанавливается простым копированием;
- 2) скачать на сайте [9] пакет **L₂** и установить его в соответствии с инструкцией по установке, имеющейся на сайте.

Для понимания текста **Maple**-файлов архива, кроме знакомства с работой в **Maple**, также полезно получить предварительные представления об основных концепциях (использования) пакета **L₂**. Обратитесь для этого к документу `l2doc.pdf` [9].

8.1 Аппроксимация тригонометрических функций

Файл `approx.mws` содержит

1. Построение аппроксимации функции $\sin(\pi t)$ многочленом на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$:
 - поиск наилучшей чебышевской (равномерной) аппроксимации многочленом;
 - замена коэффициентов многочлена на рациональные дроби — подходящие непрерывные дроби.
2. Оценка погрешности аппроксимации проверкой по сетке с шагом 0.0001.
3. Оценка погрешности аппроксимации проверкой по сетке с шагом в 10 раз меньшим. Максимум модуля отклонения получается таким же в видимых цифрах.
4. Для тех, кто недоволен строгостью такой оценки, предлагается другой вариант оценки погрешности. Проверка отклонения по сетке дополняется оценкой отклонения между узлами сетки, опирающейся на оценки отклонения соответствующих производных. Здесь благополучно используется то обстоятельство, что вторые производные как функции $\sin(\pi t)$, так и ее аппроксимации, монотонно убывают на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$.
5. Оценка ошибки

$$|r(\mathbf{BGB}) - r(\mathbf{AGA})| < a(a-b)l^2 \cdot 0.252 \cdot 10^{-5}.$$

в определении спектрального радиуса оператора \mathbf{AGA} при замене его на оператор \mathbf{BGB} , где \mathbf{B} есть оператор умножения на матрицу

$$B(t) = \begin{pmatrix} a+b-(a-b)C(t) & -(a-b)S(t) \\ -(a-b)S(t) & a+b+(a-b)C(t) \end{pmatrix},$$

где $C(t)$ и $S(t)$ — кусочно-многочленные аппроксимации функций $\cos(\pi t)$ и $\sin(\pi t)$, полученные из описанной выше аппроксимации применением формул приведения.

8.2 Расчеты витого стежня с шарнирным закреплением концов

Файл `iters.mws` содержит общую схему документа **Maple**, реализующего итерации. Например, итерации для расчета при значения параметров $l = 2$, $\Psi = \pi$, $a = 1$, $b = 4/9$ осуществляются в файле `iters49_2.mws`.

Комментарии к этому файлу:

- Загружаются пакеты и указывается, что вычисления будут происходить на отрезке $[0, 2]$ (инициализация).
- Строятся кусочно многочленные аппроксимации функций $\cos(\pi t)$ и $\sin(\pi t)$ и для контроля выводятся графики этих аппроксимаций.
- Строятся матрица $B(t)$ и оператор **BGB**, названный `Operator`.
- Создается стартовая вектор-функция **x**. Вычисляется квадрат нормы этой вектор-функции.
- Вычисляются `y := Operator(x)` и квадрат нормы этой вектор-функции. Выводится на экран отношение норм в виде десятичной дроби. Готовятся данные для следующей итерации.

Повтор последней группы и осуществляет очередную итерацию вычислений. Как только сходимость обеспечит досточную точность результата, так можно итерации прекратить и записать результат.

8.3 Витой стержень с заделкой конца

Имена файлов, реализующих эти вычисления, образованы следующим образом:

`iters*_.mws` предназначены для вычисления $r(\mathbf{AGA})$ в условиях шарнирного закрепления обоих концов стержня. Эти файлы являются просто реализациями описанного выше файла `iters.mws` применительно к конкретным значениям параметров стержня.

`legendre.mws` — подготовительные работы для построения наилучших в смысле пространства L_2 приближений многочленами Лежандра. Этот файл надо выполнить перед тем, как выполнять файлы `app*_.mws`.

app*_*.mws содержат

- определение вектор-функций $\mathbf{l}^1(t)$ и аппроксимацию ее кусочно-многочленной функцией с рациональными коэффициентами (в виде подходящих дробей); оценку погрешности;
- определение вектор-функций $\mathbf{l}^2(t)$, ортогонализацию и аппроксимацию ее кусочно-многочленной функцией с рациональными коэффициентами; оценку погрешности.
- вычисление верхней оценки для получающейся в результате погрешности

$$\Delta r \stackrel{\text{def}}{=} |r((I - \tilde{\mathbf{P}})\mathbf{BGB}(I - \tilde{\mathbf{P}})) - r((I - \mathbf{P})\mathbf{AGA}(I - \mathbf{P}))|.$$

itersfix*_*.mws предназначены для вычисления спектрального радиуса для оператора $(I - \mathbf{P})\mathbf{AGA}$ в пространстве Z , отвечающем условиям шарнирного закрепления одного конца стержня и заделки другого. Структура этих файлов аналогична таковой файлов iters*_*.mws. Ядро интегрального оператора $\tilde{\mathbf{P}}$ легко строится с использованием процедуры `l2m_FKprojector` пакета \mathbf{L}_2 .

Пропущенные в именах файлов символы означают следующее:

- на месте первой *: 49 для $b/a = 4/9$, 110 для $b/a = 1/10$;
- на месте второй *: 01 для угла закрученности $\Psi = \frac{\pi}{20}$, 03 для $\Psi = \frac{3\pi}{20}$, 05 для $\Psi = \frac{\pi}{4}$.

Благодарности

Автор выражает свою благодарность Г. Г. Кравченко и Е. И. Бравому за интерес и моральную поддержку, стимулировавшие автора как на стадии исследования, так и в процессе написания статьи.

Список литературы

- [1] В. З. Цалюк. Численное исследование зависимости критической силы для витого стержня от параметров задачи. Вычислительные методы и программирование, 2010, т. 11, с. 153–159. http://num-meth.srcc.msu.ru/zhurnal/tom_2010/v11r118.html

- [2] Прочность. Устойчивость. Колебания. Т. 3. / Под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968.
- [3] **Ю. Н. Работнов.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
- [4] **Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина.** Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. (<http://shop.rcd.ru>).
- [5] **Н. В. Азбелев, С. Ю. Култышев, В. З. Цалюк.** Функционально-дифференциальные уравнения и вариационные задачи. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. (<http://shop.rcd.ru>).
- [6] **Л. В. Канторович, Г. П. Акилов.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
- [7] **Л. Коллатц.** Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968.
- [8] **М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко, и др.** Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
- [9] **В. З. Цалюк.** Проект L_2 . Ресурс Интернет. — 2008–2010.
<http://vts.math.kubsu.ru/l2/l2.htm>,
<http://l2.pstu.ru/l2.htm>.
- [10] **В. П. Дьяконов.** Математическая система Maple V R3/R4/R5. М.: СОЛОН. 1998. 400 с.